UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 1
Cinemática

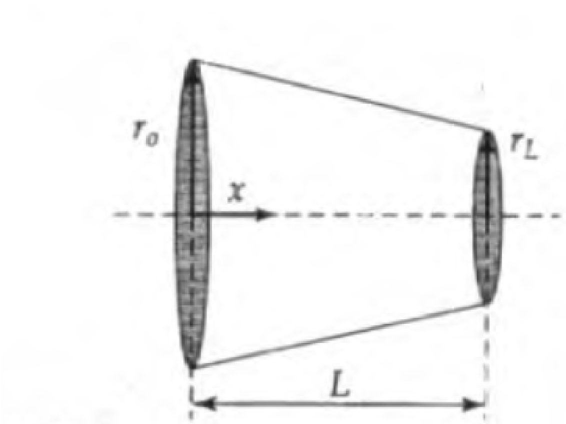
1. Considere o campo de velocidades dado por $\mathbf{v} = 3x\,\mathbf{e_x} + 6y\,\mathbf{e_y} + 5z^2\,\mathbf{e_z}$ (em cm/s). Determine a taxa de escoamento através da superfície perpendicular ao vector $\mathbf{n} = (\mathbf{e_x} + \mathbf{e_y})/\sqrt{2}$, limitada por $0 < x < 3$ e $0 < y < 4$.

2. Um vaso sanguíneo de raio r ramifica-se em 3 vasos de raio $r/2$. Se a velocidade média no vaso maior for v, indique qual é a velocidade média em cada um dos outros vasos na zona da ramificação.

3. Mostre que $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla \cdot (\rho\mathbf{v})$.

4. Considere o campo de velocidades
$$\mathbf{v} = U_0(x^2 - y^2 + x)\mathbf{e_x} - U_0(2xy + y)\mathbf{e_y}$$
a) Calcule a aceleração em $y = 1$ e $x = 1$ e $x = 3$. $U_0 = 3$ m/s.
b) Calcule a taxa de escoamento através do plano x=4, limitado por $y = 0$ e $y = 6$, e largura igual a 2 na direcção z. A normal é na direcção positiva do eixo dos x.

5. Calcule a componente axial (x) da aceleração do fluido para um campo de velocidades dado por:
$$v_x = \frac{V_0}{\left[1 + \frac{r_L - r_0}{r_0}\left(\frac{x}{L}\right)\right]^2}$$
$$v_r = \frac{2V_0 \frac{r_L - r_0}{r_0} r}{L\left[1 + \frac{r_L - r_0}{r_0}\left(\frac{x}{L}\right)\right]^3}$$



6. Para o escoamento através de um canal cónico de comprimento L, a velocidade na direcção do escoamento x, é aproximadamente

$$v_x = U_0(1 - x/L)^{-2}$$

onde U_0 é a velocidade à entrada do canal.
a) Determine a aceleração na direcção x, em $x = 2$ m para $U_0 = 6$ m/s e $L = 4$m.
b) Identifique duas posições no canal onde a velocidade dada pelo campo anterior é incorrecta.

7. Considere o escoamento estacionário bidimensional

$$v_x = y\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$v_y = \frac{y^2}{2L}$$

com x em $[0, L]$. Determine as linhas de corrente.

8. Dado o campo de velocidades $v_x = u \cos \omega t$ e $v_y = v \sin \omega t$ com $u/\omega = v/\omega = 1$ m. Calcule
a) As linhas de corrente para $\omega t = 0$, $\pi/2$ e $\pi/4$.
b) As trajectórias (pathlines)
c) A trajectória de uma partícula, que em t=0 está no ponto x=0, y=1 m.

9. Considere o escoamente não-estacionário

$$u = u_0, \qquad v = kt, \qquad w = 0,$$

onde u_0 e k são constantes positivas. Mostre que as linhas de corrente são linhas retas e trace-as em dois instantes de tempo diferentes. Mostre também que um elemento de fluido segue uma trajetória parabólica.

10. Independentemente da compressibilidade, cada elemento de fluido conserva a sua massa durante o escoamento. Considere a taxa de escoamento de massa através de uma superfície fechada S, no interior do fluido, e mostre que a conservação da massa implica

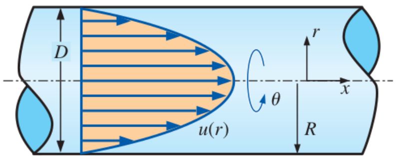
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{u}) = 0$$

onde $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a densidade variável do fluido. Mostre ainda que esta equação pode ser escrita como

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \nabla.\mathbf{u} = 0$$

Segue-se que se $\nabla.\mathbf{u} = 0$, então $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$. O que significa isso? Faz sentido?

11. Considere um escoamento de Poiseuille axissimétrico totalmente desenvolvido, isto é, um escoamento num tubo cilíndrico de raio R (diâmetro $D = 2R$), sob um gradiente de pressão dP/dx como ilustrado na figura abaixo (dP/dx é constante e negativo). O escoamento é estacionário,



incompressível e axissimétrico relativamente ao eixo dos x. As componentes da velocidade são dadas por

$$u_x = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(r^2 - R^2) \qquad u_r = 0 \qquad u_\theta = 0$$

onde μ é a viscosidade do fluido.

a) Este escoamento é rotacional ou irrotacional? Se for rotacional, calcule a componente da vorticidade na direção θ e discuta o sinal da rotação.

b) Para o escoamento de Poiseuille axissimétrico da alínea a, calcule as taxas de deformação linear nas direções x e r e calcule a taxa de deformação de cisalhamento ε_{xr}. O tensor da taxa de deformação em coordenadas cilíndricas (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u_x), é

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta x} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

c) Combine os resultados da alínea b para formar o tensor da taxa de deformação axissimétrico ε_{ij},

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}$$

Os eixos x e r são eixos principais?

12. Aproxima-se o escoamento de ar num acessório de aspirador de pó pelas componentes da velocidade no plano central (o plano xy):

$$u = \frac{-\dot{V}x}{\pi L}\frac{x^2 + y^2 + b^2}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2b^2 + y^4 - 2y^2b^2 + b^4}$$

e

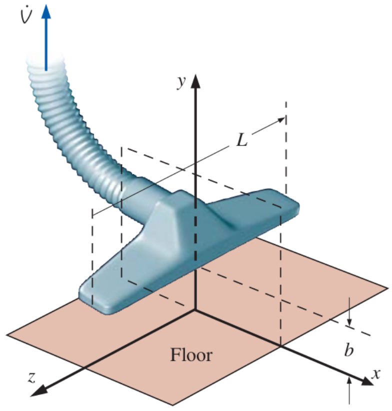
$$v = \frac{-\dot{V}y}{\pi L}\frac{x^2 + y^2 - b^2}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2b^2 + y^4 - 2y^2b^2 + b^4}$$

onde b é a distância do acessório acima do piso, L é o comprimento do acessório e $\dot{V}$ é a taxa de escoamento de volume do ar aspirado pelo tubo (figura abaixo).

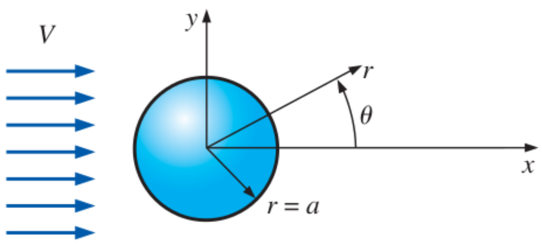
a) Determine a localização do(s) ponto(s) de estagnação deste campo de velocidades.

b) Para o caso em que $b = 2$ cm, $L = 35$ cm e $\dot{V} = 0.1098$ m^3/s, desenhe um gráfico dos vetores de velocidade na metade superior do plano xy de $x = -3$ cm a 3 cm e de $y = 0$ cm a 2.5 cm. Desenhe os vetores necessários para ter uma noção do campo de velocidades. Nota: A velocidade é infinita no ponto $(x, y) = (0, 2.0$ cm$)$, portanto, não tente desenhar um vetor de velocidade nesse ponto.

c) Considere o campo de velocidades para o aspirador da alínea b. Calcule a velocidade de escoamento ao longo do chão. As partículas de poeira são mais facilmente aspiradas nos locais de velocidade máxima. Onde ficam esses locais? O aspirador fará um bom trabalho ao aspirar a poeira diretamente abaixo da entrada (na origem)? Discuta.



13. Existem inúmeras ocasiões em que um escoamento aproximadamente uniforme encontra um cilindro circular longo alinhado perpendicularmente ao escoamento (figura abaixo). Exemplos



incluem ar em torno de uma antena dum carro, vento contra um mastro de bandeira ou poste de telefone, vento nos fios elétricos e correntes oceânicas que colidem com as vigas redondas submersas que apoiam as plataformas de petróleo. Em todos estes casos, o escoamento na parte traseira do cilindro é instável e geralmente turbulento. No entanto, o escoamento na parte frontal do cilindro é muito mais estável e previsível. Na verdade, exceto numa camada limite muito fina perto da superfície do cilindro, o campo de velocidades pode ser aproximado pelo seguinte escoamento estável e bidimensional no plano xy ou $r\theta$:

$$u_r = V\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) \qquad u_\theta = -V\sin\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)$$

a) Este campo de velocidades é rotacional ou irrotacional? Explique.
b) Considere o campo de velocidades da alínea a. Considere apenas a parte frontal ($x < 0$). Existe um ponto de estagnação nesse domínio. Onde ? Dê sua resposta em coordenadas cilíndricas e cartesianas.
c) Calcule o tensor das taxas de deformação em coordenadas cilíndricas. Discuta as alterações na forma dos elementos de fluido ao longo do escoamento.
d) O escomento é compressível ou incompressível ?